



# Etude du champ des vitesses et du transfert thermique dans un canal à parois sinusoïdales soumises à un flux de chaleur de densité constante

A. HASSAINE,† M. DAGUENET† et G. MENGUY‡

† Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Université de Perpignan, 52 avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan Cédex, France

‡ Laboratoire d'Etudes Thermiques et Solaires, Université Claude Bernard, Lyon I, 43 Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cédex, France

(Reçu le 24 mars 1993 et sous forme finale le 11 octobre 1993)

**Résumé**—On présente une approche numérique de la détermination des caractéristiques cinématiques et thermiques d'un écoulement bidimensionnel, laminaire et permanent dans un canal à parois sinusoïdales soumises à un flux de chaleur de densité constante. Cette approche est basée sur une transformation non-orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique, de configuration complexe, en un domaine rectangulaire de calcul. Les résultats obtenus pour la zone centrale, où l'écoulement est établi et périodique, montrent l'existence d'une déformation des lignes de courant et la présence de poches de recirculation tourbillonnaire du fluide dans les régions de forte courbure. Du côté thermique, les calculs montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl, de l'amplitude et de la largeur adimensionnelles du canal.

## 1. INTRODUCTION

PATANKAR *et al.* [1] ont développé un concept général d'écoulements établis et périodiques. Ces écoulements prennent naissance loin des extrémités de canaux dont la section transversale varie périodiquement dans le sens du déplacement du fluide. Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulements à celle d'un module isolé, de longueur égale à la distance entre deux sections identiques, aux extrémités duquel sont appliquées des conditions aux limites périodiques.

Ces canaux peuvent être symétriques [2, 3] et non symétriques [4–7]. Leur étude aussi bien numérique qu'expérimentale a pour objectif l'amélioration du transfert thermique (ou de masse) dans les installations où ils sont utilisés, comme par exemple les échangeurs de chaleur à plaques.

Faghri *et al.* [8] ont développé une méthodologie de résolution de problèmes de convection forcée, dans lesquels une paroi de l'enceinte enfermant le fluide n'est pas parallèle aux lignes de coordonnées. Asako et Faghri [4] ont élargi le champ d'application de ce travail au cas plus général où les deux parois ne sont pas parallèles aux lignes de coordonnées. La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non-orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique du fluide en un domaine rectangulaire de calcul. Les équations différentielles de base sont intégrées suivant les faces d'un volume élémentaire du fluide délimité par les lignes de coordonnées du système non-orthogonal. Puis, ces équations, sous leur forme intégrée, sont discrétisées pour obtenir les équations algébriques du problème.

Asako et Faghri ont appliqué cette méthodologie de résolution à deux écoulements forcés dans deux canaux en 'zig-zag' à sommets non arrondis [4] et à sommets arrondis [5], dont les parois sont maintenues à une température constante. Ces auteurs ont conservé la pression dans les équations de Navier–Stokes et ont utilisé le programme informatique 'SIMPLE' élaboré par Patankar pour les calculs.

A notre connaissance, l'écoulement dans un canal à parois sinusoïdales soumises à un flux de chaleur de densité constante n'a fait l'objet d'aucune étude numérique. Par ailleurs, dans notre travail, nous éliminons la pression des équations de Navier–Stokes en introduisant la fonction de courant et la vorticité. Nous élaborons aussi notre propre programme de calcul.

## 2. FORMULATION THEORIQUE

### 2.1. Caractère périodique de l'écoulement

La section du canal se répète toutes les longueurs d'onde (Fig. 1). De ce fait, à partir d'une distance  $x_0$  suffisamment grande de l'entrée du canal, l'écoulement devient périodique, c'est-à-dire qu'il se répète pour deux sections distantes d'une longueur d'onde. Pour la vitesse, cette périodicité se traduit par les relations suivantes [1]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x+l, y) = u(x+2l, y) = \dots \\ v(x, y) &= v(x+l, y) = v(x+2l, y) = \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Ainsi la distribution de la vitesse dans des modules consécutifs et de longueur égale à une longueur d'onde se répète. Par ailleurs, les parois du canal étant

**NOMENCLATURE**

$a$	amplitude du profil des parois	$\nu$	viscosité cinématique.
$c$	hauteur du canal	<b>Grandeurs adimensionnelles</b>	
$C_p$	chaleur massique	$A$	amplitude du profil des parois, $a/l$
$f(x)$	équation du profil des parois	$C$	hauteur du canal, $c/l$
$l$	longueur d'onde du profil des parois du canal	$F(X)$	équation du profil des parois du canal, $f(x)/l$
$\dot{m}$	débit massique du fluide	$L$	longueur d'onde adimensionnelle du profil des parois du canal ( $l$ )
$q_n$	densité du flux thermique	$Pr$	nombre de Prandtl, $\mu C_p/\lambda$
$Q$	puissance thermique reçue par un module de longueur $l$ et de largeur égale à l'unité	$q_n^+$	densité du flux thermique, $q_n l/\lambda t_a$
$t$	température du fluide	$Re$	nombre de Reynolds, $u_m 2c/\nu$
$t_a$	température ambiante	$T$	température, $t/t_a$
$u_m$	vitesse moyenne débitante	$T'$	température périodique, $t'/t_a$
$u, v$	composantes horizontale et verticale de la vitesse du fluide	$U$	composantes de la vitesse, $u/\nu$
$x, y$	coordonnées cartésiennes.	$V$	composantes de la vitesse, $v/\nu$
<b>Symbols grecs</b>		$U_m$	vitesse moyenne débitante, $u_m l/\nu$
$\lambda$	conductivité thermique	$X$	coordonnées cartésiennes, $x/l$
$\mu$	viscosité dynamique	$Y$	coordonnées cartésiennes, $y/l$
		$\Theta$	coefficient de variation linéaire de la température, $\theta l/t_a$ .

soumises à un flux de chaleur de densité constante, la puissance thermique reçue par chacun de ces modules est la même. Ceci veut dire que la température du fluide croît dans le sens de l'écoulement mais que son élévation après passage dans chacun des modules reste constante. Alors, d'après [1], la température du fluide peut être décomposée en un terme linéaire dépendant de la seule coordonnée longitudinale, auquel viendrait s'ajouter un terme périodique dépendant des deux coordonnées, pour tenir compte de la variation de la vitesse au niveau d'une section donnée. On a donc :

$$t(x, y) = t(x_0) + \theta(x - x_0) + t'(x, y). \quad (2)$$

Le coefficient de variation linéaire est défini par :

$$\theta = \frac{t(x+l, y) - t(x, y)}{l} = \frac{Q}{\dot{m} C_p l}. \quad (3)$$

Le terme  $t'(x, y)$ , selon [1], varie périodiquement :

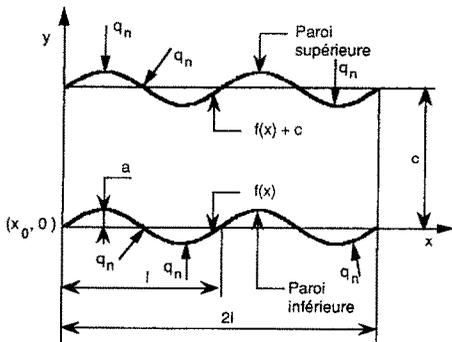


FIG. 1. Coupe longitudinale du canal.

$$t'(x, y) = t'(x+l, y) = t'(x+2l, y) = \dots \quad (4)$$

Par la suite, le problème sera ramené à l'étude d'un module isolé de longueur égale à une longueur d'onde et de largeur égale à l'unité, ce qui nous permet de déterminer les caractéristiques cinématiques et thermiques de l'écoulement dans sa zone centrale. Les relations (1), (2), et (4) sont utilisées pour formuler les conditions aux limites aux extrémités de ce module.

**2.2 Equations du problème**

L'écoulement est bidimensionnel, laminaire et permanent. Les propriétés physiques du fluide sont constantes, de sorte que les problèmes cinématique et thermique sont dissociés. Les équations adimensionnelles régissant le problème s'écrivent sous la forme suivante :

équation du mouvement

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad (5)$$

équation de la vorticité

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -W \quad (6)$$

équation de la chaleur

$$U \frac{\partial T'}{\partial X} + V \frac{\partial T'}{\partial Y} + U\Theta = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial Y^2} \right). \quad (7)$$

$W$  est la vorticité adimensionnelle et  $\Psi$  désigne la fonction de courant définie par  $U = (\partial \Psi / \partial Y)$  et  $V = -(\partial \Psi / \partial X)$ . Dans (5), l'action de la force de la

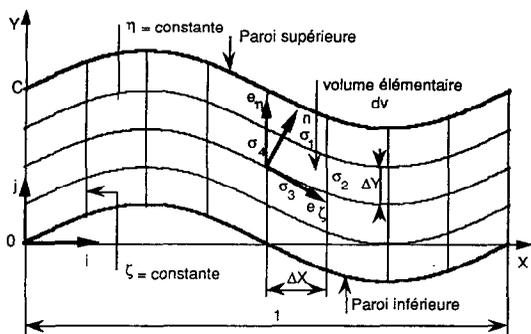


FIG. 2. Domaine physique d'écoulement.

pesanteur est négligée. Dans (7), on a négligé les effets de la dissipation visqueuse et de l'expansion thermique.

On donne une forme générale aux équations du problème en introduisant une fonction  $\Phi$  pouvant, suivant les cas, désigner:  $W$ ,  $T'$ , ou  $\Psi$ . Alors les équations (5) et (7) peuvent être réunies en une seule.

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - B \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) = R \quad (8)$$

$$B = 1 \text{ et } R = 0 \text{ pour } \Phi = W \quad (9)$$

$$B = 1/Pr \text{ et } R = -U\Theta \text{ pour } \Phi = T'. \quad (10)$$

Quant à l'équation (6), elle devient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = -W. \quad (11)$$

### 2.3. Introduction d'une transformation de coordonnées

Afin de simplifier l'expression des conditions aux limites sur les parois, on opère un changement de coordonnées de manière à ce que les frontières du domaine d'écoulement se traduisent par des valeurs constantes des nouvelles coordonnées.

On considère les coordonnées  $(\zeta, \eta)$  définies par :

$$\zeta = X \quad (12)$$

$$\eta = Y - F(X) = Y - F(\zeta)$$

$$F(X) = F(\zeta) = F = A \sin(2\pi X). \quad (13)$$

Les calculs sont effectués pour un module de longueur  $l$ . Ceci nous amène à fixer l'origine des abscisses en  $X_0$ . De (12), nous déduisons le domaine de variation des coordonnées  $(\zeta, \eta)$  :

$$0 \leq \zeta \leq l \text{ et } 0 \leq \eta \leq C. \quad (14)$$

Ainsi, notre domaine d'écoulement à parois sinusoïdales est transformé en un domaine de calcul rectangulaire (Figs. 2 et 3). Les composantes de la vitesse

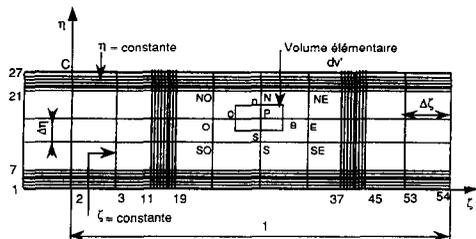


FIG. 3. Domaine rectangulaire de calcul.

dans le nouveau système de coordonnées sont données par la relation (15)

$$U_\zeta = U\alpha^{1/2}; \quad U_\eta = V - F'U = -\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \quad (15)$$

où

$$F' = \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial \zeta}; \quad \alpha = 1 + F'^2. \quad (16)$$

### 2.4. Elaboration des équations algébriques

Pour obtenir les équations algébriques régissant notre problème, on intègre les équations (8) et (11) dans un volume élémentaire  $dv$  de largeur égale à l'unité (Fig. 2). Le théorème de la divergence, appliqué aux termes de gauche des équations, transforme les intégrales de volume en intégrales de surface. Les intégrales de surface sont exprimées comme étant la somme algébrique des intégrales suivant les quatre faces du volume élémentaire. Dans chaque intégrale suivant une face, on introduit la composante  $U_\eta$  de la vitesse et on évalue l'élément de surface  $d\sigma$  en fonction de  $d\zeta$  et  $d\eta$ . Les dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes  $y$  sont remplacées par des dérivées par rapport aux coordonnées  $(\zeta, \eta)$ . Pour donner une forme compacte aux équations finales, on opte pour la désignation suivante :

$$\Omega = -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad \gamma = F' \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$

$$\chi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad \phi = F' \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (17)$$

Maintenant, (8) prend la forme :

$$\int_{\sigma} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \Phi d\sigma - B \int_{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) d\sigma = \int_{\sigma_1} [\Phi U_\eta + B(\Omega + \gamma)] d\zeta$$

$$- \int_{\sigma_3} [\Phi U_\eta + B(\Omega + \gamma)] d\zeta + \int_{\sigma_2} [\Phi U + B(\chi + \phi)] d\eta$$

$$- \int_{\sigma_4} [\Phi U + B(\chi + \phi)] d\eta = \int_V R d\zeta d\eta. \quad (18)$$

On exprime (11) sous une forme analogue :

$$- \int_{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) d\sigma = \int_{\sigma_1} (\Omega + \gamma) d\zeta - \int_{\sigma_3} (\Omega + \gamma) d\zeta$$

$$+ \int_{\sigma_2} (\chi + \phi) d\eta - \int_{\sigma_4} (\chi + \phi) d\eta = \int_V W d\zeta d\eta. \quad (19)$$

La forme (18) des équations initiales du mouvement (5) et de la chaleur (7) et la forme (19) de l'équation de la vorticité (6) sont employées par la suite dans la formulation numérique du problème.

### 2.5. Conditions aux limites

Pour les vitesses. A l'entrée et à la sortie du module  etudi e, on exprime en coordonnées  $(\zeta, \eta)$  la condition périodique donnée par la relation (1) :

$$U(0, \eta) = U(1, \eta) \quad \text{et} \quad V(0, \eta) = V(1, \eta). \quad (20)$$

Sur les parois inférieure et supérieure, on impose la condition de non-glissement des particules du fluide :

$$U(\zeta, 0) = V(\zeta, 0) = 0 \quad \text{et} \quad U(\zeta, C) = V(\zeta, C) = 0. \quad (21)$$

Pour la fonction de courant. A l'entrée et à la sortie du module étudié, on exprime en coordonnées  $(\zeta, \eta)$  une condition périodique qui découle de la relation (1) :

$$\Psi(0, \eta) = \Psi(1, \eta). \quad (22)$$

Pour les parois inférieure et supérieure, comme condition, on prend :

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, 0) &= 0 \\ \Psi(\zeta, C) &= U_m C. \end{aligned} \quad (23)$$

Pour la vorticité. A l'entrée et à la sortie du module étudié, on exprime en coordonnées  $(\zeta, \eta)$  une condition périodique qui découle de la relation (1) :

$$W(0, \eta) = W(1, \eta). \quad (24)$$

Sur les parois, on déduit les conditions sur la vorticité en partant de la condition (21) et de la définition même de  $W$  :

$$W(\zeta, 0) = -F' \left( \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} - \alpha \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (25)$$

$$W(\zeta, C) = -F' \left( \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right)_{\eta=C} - \alpha \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=C}. \quad (26)$$

Pour la température. A l'entrée et à la sortie du module étudié, on exprime en coordonnées  $(\zeta, \eta)$  la condition périodique donn e par la relation (4) :

$$T'(0, \eta) = T'(1, \eta). \quad (27)$$

Les parois sont soumises à un flux de chaleur de densité constante. Il en découle, en tenant de la relation (2), la condition suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \Theta \frac{\partial X}{\partial n} + \frac{\partial T'}{\partial n} = -q_n^+. \quad (28)$$

On exprime les d riv es suivant la normale  $n$ . Les d riv es partielles de la composante périodique adimensionnelle de la température par rapport aux coordonnées  $(X, Y)$  sont remplac es par des d riv es par rapport aux coordonnées  $(\zeta, \eta)$ . Alors, l'équation (28) devient :

$$\left( \frac{\partial T'}{\partial \zeta} + \Theta \right) \cos \beta_{nx} + \frac{\partial T'}{\partial \eta} (\cos \beta_{ny} - F' \cos \beta_{nx}) = -q_n^+. \quad (29)$$

$\beta_{nx}, \beta_{ny}$ —Angles formés par la normale à la paroi et les axes  $x$  et  $y$ . Le cosinus de ces angles s'exprime en fonction de la d riv e  $F'$  de l'équation du profil des parois.

## 2.6. Définition des coefficients de transfert thermique et des nombres de Nusselt

Le profil des températures étant calculé pour des sections verticales du canal d'écoulement, nous définissons le coefficient local de transfert thermique, paroi-fluide, comme étant [7] :

$$h_x = \frac{q_n}{t'_{px} - t'_{fx}}. \quad (30)$$

$t'_{px}$  = Composante périodique de la température, au niveau de la paroi, à une abscisse  $x$  donn e.

$t'_{fx}$  = Composante périodique moyenne de la température du fluide au niveau d'une section donn e. Elle se calcule par :

$$t'_{fx} = \frac{\int_{f(x)}^{c+f(x)} t'(x, y) u(x, y) dy}{\int_{f(x)}^{c+f(x)} u(x, y) dy}. \quad (31)$$

Le nombre de Nusselt local est pris égal à :

$$Nu_x = \frac{h_x 2c}{\lambda}. \quad (32)$$

Le coefficient de transfert thermique et le nombre de Nusselt moyens, pour une paroi, sont définis par [3] :

$$h_m = \frac{\int_s h_x ds}{s}; \quad Nu_m = \frac{h_m 2c}{\lambda} \quad (33)$$

où  $s$  est la surface d'échange d'une paroi du module étudié.

Le nombre de Nusselt moyen d'un module est égal à la moyenne des nombres de Nusselt moyens des parois inférieure et supérieure.

## 3. FORMULATION NUMERIQUE

### 3.1. Discrétisation des équations

Les intégrales de surface des équations (18) et (19) sont approxim es suivant les quatre faces du volume élémentaire de calcul  $dv'$  (Fig. 3).

Cette approximation est faite en considérant toutes les grandeurs variables comme constantes au niveau d'une face donn e. Leurs valeurs respectives sont estim es aux centres  $n, e, s$  et  $o$  des quatre faces et au centre  $P$  du volume. Les deux équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} [(\Phi U_n + B\Omega)_n - (\Phi U_n + B\Omega)_e] \Delta \zeta \\ + [(\Phi U + B\chi)_e - (\Phi U + B\chi)_o] \Delta \eta \\ = BS_o + R_p \Delta \zeta \Delta \eta \end{aligned} \quad (34)$$

$$(\Omega_n - \Omega_e) \Delta \zeta + (\chi_e - \chi_o) \Delta \eta = S_o + W_p \Delta \zeta \Delta \eta \quad (35)$$

avec :

$$S_o = (\gamma_s - \gamma_n) \Delta \zeta + (\phi_o - \phi_e) \Delta \eta. \quad (36)$$

Pour discrétiser ces trois équations, on utilise une grille à mailles variables de  $53 \times 27$  points (Fig. 3). Les termes du membre de gauche de l'équation (34) sont discrétisés suivant une méthodologie proposée par Patankar [8], soit :

$$\Delta\zeta(\Phi U_\eta + B\Omega)_n = F_n \Phi_n - D_n \Delta\Phi_n = I_n \quad (37)$$

$$F_n = \Delta\zeta(U_\eta)_n = [(U_\eta)_N + (U_\eta)_P] \frac{\Delta\zeta}{2} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta\zeta B\Omega_n &= -\alpha_n B \Delta\zeta \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_n \\ &= -\frac{\alpha_n B \Delta\zeta}{\Delta\eta} (\Phi_N - \Phi_P) = -\frac{\alpha_n B \Delta\zeta}{\Delta\eta} \Delta\Phi_n \end{aligned}$$

d'où

$$D_n = \alpha_n B \frac{\Delta\zeta}{\Delta\eta} \quad (39)$$

$$\Delta\eta(\Phi U + B\chi)_e = F_e \Phi_e - D_e \Delta\Phi_e = I_e \quad (40)$$

$$F_e = \Delta\eta U_e = (U_E + U_P) \frac{\Delta\eta}{2} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta B\chi_e &= -\Delta\eta B \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right)_e = -\frac{\Delta\eta B}{\Delta\zeta} (\Phi_E - \Phi_P) \\ &= -\frac{\Delta\eta B}{\Delta\zeta} \Delta\Phi_e \end{aligned}$$

d'où

$$D_e = B \frac{\Delta\eta}{\Delta\zeta} \quad (42)$$

Pour définir  $I_s$  et  $I_o$  ainsi que les grandeurs  $F$  et  $D$  correspondantes on procède d'une manière analogue avec les expressions  $\Delta\zeta(\Phi U_\eta + B\Omega)_s$  et  $\Delta\eta(\Phi U + B\chi)_o$ . La grille étant à mailles variables,  $\Delta\eta$  et  $\Delta\zeta$  sont des grandeurs non constantes.

Pour un écoulement satisfaisant l'équation de continuité, nous avons :

$$F_n + F_e - F_s - F_o = 0. \quad (43)$$

Dans la partie gauche de l'équation (34), tous les termes sont remplacés par les expressions 'i' correspondantes. On emploie aussi (43). On obtient :

$$\begin{aligned} (I_n - F_n \Phi_P) + (I_e - F_e \Phi_P) - (I_s - F_s \Phi_P) \\ - (I_o - F_o \Phi_P) = BS_0 + \int_{d_0} R \, d\zeta \, d\eta. \quad (44) \end{aligned}$$

Toujours selon [8], le premier et troisième termes de la partie gauche de l'équation (44) peuvent s'exprimer par :

$$(I_n - F_n \Phi_P) = a_N (\Phi_P - \Phi_N) \quad (45)$$

$$a_N = D_n A \left| \frac{F_n}{D_n} \right| + \| -F_n, 0 \| \quad (46)$$

$$(I_s - F_s \Phi_P) = a_S (\Phi_S - \Phi_P) \quad (47)$$

$$a_S = D_s A \left| \frac{F_s}{D_s} \right| + \| F_s, 0 \|. \quad (48)$$

Le deuxième et quatrième termes de la partie gauche de l'équation (44), ainsi que les coefficients 'a' correspondants, sont exprimés d'une manière analogue.

Le terme  $A|(F/D)|$  est donné par la loi de puissance introduite par A. Patankar [8] :

$$A \left| \frac{F}{D} \right| = \left\| 0, \left( 1 - 0, 1 \left| \frac{F}{D} \right| \right)^2 \right\|. \quad (49)$$

Le symbole  $\|F, 0\|$  signifie que la valeur de l'expression est égale à  $F$ , si  $F > 0$ , et égale à 0, dans tous les autres cas.

Le membre de gauche de l'équation (35) ne contenant pas de terme convectif, sa discrétisation est faite en utilisant des différences finies centrées. Le terme  $S_0$ , donné par l'équation (36), est approximé en prenant une valeur moyenne des valeurs au niveau des points N, NE, E, SE, S, EO, O et NO (Fig. 3).

Cette discrétisation permet de ramener les équations (34) et (35) à la forme suivante :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_O \Phi_O + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S \quad (50)$$

où les coefficients 'a' sont variables,  $S = BS_0 + R_P \Delta\zeta \Delta\eta$  pour l'équation (34) et,  $S = S_0 + W_P \Delta\zeta \Delta\eta$  pour l'équation (35).

$i$  et  $j$  étant respectivement les numéros des colonnes et des lignes (Fig. 2), les conditions périodiques aux limites (22), (24) et (27) s'expriment par :

$$\Psi(1, j) = \Psi(53, j) \quad \text{et} \quad \Psi(2, j) = \Psi(54, j)$$

$$W(1, j) = W(53, j) \quad \text{et} \quad W(2, j) = W(54, j)$$

$$T'(1, j) = T'(53, j) \quad \text{et} \quad T'(2, j) = T'(54, j).$$

Pour discrétiser les dérivées partielles figurant dans les conditions aux limites (25) et (26) sur la vorticité, on approxime, au voisinage des parois, les composantes de la vitesse par un trinôme du second degré. Les relations qui en découlent, conformément à la Fig. 3, sont [9] :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{2\Delta\eta} [4U(i, 2) - 3U(i, 1) - U(i, 3)]$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=c} = -\frac{1}{2\Delta\eta} [4U(i, 26) - 3U(i, 27) - U(i, 25)].$$

Les relations pour les dérivées partielles de la composante  $U_\eta$  sont analogues. On tient compte aussi du fait que sur les parois la vitesse est nulle. Par ailleurs, dans les relations ci-dessus, on introduit la fonction de courant en remplaçant les composantes des vitesses par des différences finies centrées.

Dans la condition (29), la dérivée  $(\partial T'/\partial\zeta)$  au niveau des parois est approximée par une différence finie centrée. Quant à la dérivée  $(\partial T'/\partial\eta)$ , sa discrétisation découle d'une approximation de la température par un polynôme du troisième degré [9], soit conformément à la Fig. 3 :

$$\left(\frac{\partial T'}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{6\Delta\eta} [-11T'(i, 1) + 18T'(i, 2) - 9T'(i, 3) + 2T'(i, 4)]$$

$$\left(\frac{\partial T'}{\partial \eta}\right)_{\eta=C} = -\frac{1}{6\Delta\eta} [-11T'(i, 27) + 18T'(i, 26) - 9T'(i, 25) + 2T'(i, 24)].$$

3.2. Résolution numérique

Pour chaque point de la grille de calcul et pour chacune des grandeurs  $W$ ,  $Y$  et  $T'$ , on a une équation (50). Les valeurs au niveau des points N et S sont prises égales à celles découlant d'une itération précédente. Ainsi pour une ligne donnée de la grille, les valeurs de ces grandeurs étant connues aux extrémités, alors l'ensemble des équations au niveau des points d'une même ligne se ramène à une matrice tridiagonale de 52 équations à 52 inconnues. Comme il y a 25 lignes, alors le nombre de matrices semblables est de 25 pour chacune des grandeurs  $W$ ,  $Y$  et  $T'$ .

La résolution de chaque matrice est faite par une méthode directe en utilisant l'algorithme de Thomas [9]. On commence par le calcul, ligne par ligne, de la vorticité et, une fois tous les points de la grille visités, on passe au calcul, ligne par ligne, de la fonction de courant. Après cela, le programme effectue un test de convergence sur la vorticité et la fonction de courant. Si le résultat n'est pas concluant une nouvelle itération est amorc e; dans le cas contraire, le calcul ligne par ligne de la température commence.

Le calcul de la vorticité et de la fonction de courant est initialisé en utilisant un profil de Poiseuille de distribution de la vitesse.

Le calcul de la composante périodique de la température est initialisé en prenant une valeur nulle au niveau de tous les points de la grille.

On définit un critère de convergence pour la vorticité en rapportant l'erreur maximale à la valeur moyenne pour toute la grille :

$$\max \frac{|W(i, j)^{K+1} - W(i, j)^K|}{W_m^{K+1}} \leq \varepsilon_1 \quad (51)$$

$$W_m = \frac{\sum_{i=2}^{i=N-1} \sum_{j=1}^{j=M} W(i, j)}{(N-2)M} \quad (52)$$

où  $K$  est le numéro d'itération et  $W_m$  la valeur moyenne de la vorticité pour toute la grille.

On utilise un critère semblable pour la température. Pour la fonction de courant, on rapporte l'écart maximal entre deux itérations consécutives à la valeur de la fonction de courant. On fixe :  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ . Le nombre maximal d'itérations est égal à 1000.

3.3. Résultats et discussion

On teste la validité du modèle mathématique et du programme informatique en les appliquant à l'écoulement entre deux plaques planes. Pour cela, il suffit de

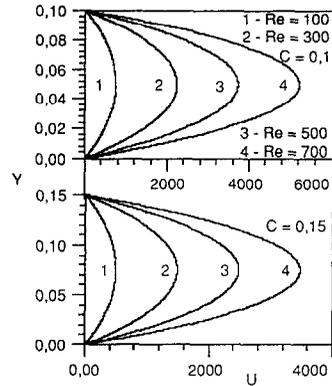


FIG. 4. Profil de la vitesse pour  $A = 0$ .

prendre  $A = 0$ . Les deux fluides ayant fait l'objet des calculs sont l'eau ( $Pr = 4,10$ ) et l'air ( $Pr = 0,71$ ). La Fig. 4 montre qu'on obtient un profil parabolique de la composante horizontale de la vitesse. Les calculs donnent une composante verticale nulle. Les lignes de courant sont parallèles aux parois. La Fig. 5 montre que le nombre de Nusselt est indépendent de  $C$ ,  $Re$  et  $Pr$ . La variation de  $Nu_m$  est inférieure à 1% pour valeur de  $Pr$  passant de 0,71 à 4,10.

Ainsi on retrouve les résultats connus de l'écoulement établi entre deux plaques planes, dans la zone situ e loin des extrémités.

Pour le canal à parois ondul es, les calculs sont réalisés pour des valeurs de  $A$  égales à 0,1, 0,2, 0,3 et pour des valeurs de  $C$  égales à 0,1 et 0,15 pour l'eau, et 0,10, 0,15 et 0,25 pour l'air. Pour l'eau, en écoulement laminaire, une valeur de  $C$  supérieure à 0,15 entraînerait soit une valeur très faible de la vitesse, soit une longueur d'onde du profil des parois très réduite.

Selon ref. [6], pour  $A = 0,269$  et  $Re = 700$ , un régime de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent a lieu. Au delà, des effets tri-dimensionnels apparaissent et nous éloignent de nos hypothèses de base. Dans ces conditions, on limite nos calculs à une valeur du nombre de Reynolds égale à 700.

Sur la Fig. 6, pour la représentation des courbes, la hauteur du canal a été multipli e par le rapport  $A/C$ . Cette figure montre l'apparition d'une déformation des lignes de courant dans les zones de forte courbure, du côté de la paroi qui participe le plus au changement de la direction de l'écoulement du fluide. Cette déformation s'accroît avec l'augmentation de  $A$  et de  $Re$ . Dans ces zones apparaissent des poches de recir-

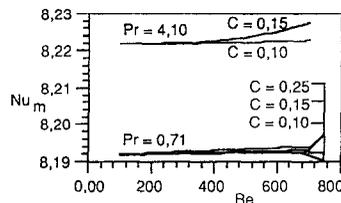


FIG. 5. Nombre de Nusselt moyen pour  $A = 0$ .

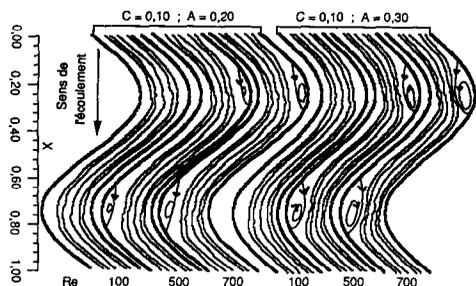


FIG. 6. Lignes de courant.

culution qui se situent entre les points de décollement et de réattachement du fluide aux parois. Asako et Faghri ont observé un phénomène analogue [4, 5]. Les lignes de courant ont été obtenues en utilisant la sous-routine SEARCH [10].

Les Figs. 7 et 8 montrent que les composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse changent d'orientation dans ces zones de forte courbure. Cet état de fait confirme la présence d'un courant de recirculation dans ces poches de fluide. Les calculs indiquent que cette recirculation est d'autant plus intense que les valeurs de  $Re$  et  $A$  sont grandes. La juxtaposition des courbes de  $U$  au niveau des sections  $0,25L$  et  $0,75L$  fait apparaître une parfaite symétrie axiale entre elles. Cela signifie que les profils de  $U$  au voisinage d'une paroi, au niveau d'une section donnée, se répètent au voisinage de la paroi opposée, au niveau d'une section distante de  $0,5L$ . La Fig. 8 montre que les courbes juxtaposées de  $V$  présentent une symétrie centrale. Les profils de

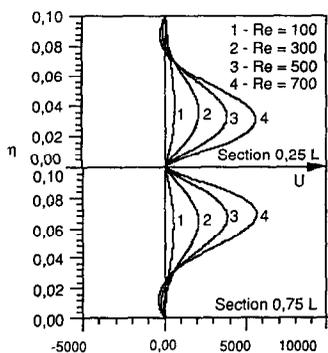


FIG. 7. Composante  $U$  de la vitesse pour  $C = 0,1$  et  $A = 0,3$ .

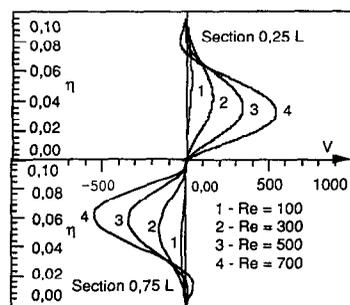


FIG. 8. Composante  $V$  de la vitesse pour  $C = 0,1$  et  $A = 0,3$ .

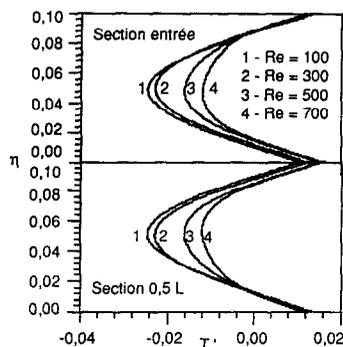


FIG. 9. Température  $T'$  pour  $C = 0,1$ ,  $A = 0,3$  et  $Pr = 4,10$ .

$V$  sont donc sujets au même phénomène de répétition ; de plus, il y a changement d'orientation de cette composante de la vitesse en raison du changement d'inclinaison des parois. Ces résultats concordent parfaitement avec la géométrie du canal.

Les courbes de  $U$  et  $V$  obtenues à l'entrée du module étudié et au niveau de la section  $0,5L$  présentent les mêmes symétries. Les profils de  $U$  ne font pas état de valeurs négatives, ce qui atteste qu'il n'y a pas de courant de recirculation. Au niveau de ces sections, en raison de l'inclinaison des parois, les valeurs de  $V$  sont élevées et dépassent celles de  $U$  pour  $A = 0,2$  et  $0,3$ .

Les Figs. 9 et 10 montrant les courbes de la composante périodique adimensionnelle  $T'$  de la température font état de la même symétrie que celle relative à la composante  $U$  de la vitesse. Dans les zones de forte courbure et pour des valeurs élevées de  $Re$ ,  $T'$  présente une plage où elle reste quasi constante suivant la hauteur du canal. Cette plage se situe dans les poches de recirculation du fluide. Les calculs pour  $A = 0,2$  montrent la même particularité, mais elle est plus atténuée. Pour  $A = 0,1$ , elle est à peine décelable pour  $Re = 700$ . Ces figures indiquent aussi que les courbes de  $T'$  se tassent avec l'augmentation de  $Re$ , prouvant ainsi une atténuation de l'écart de température entre les couches du fluide.

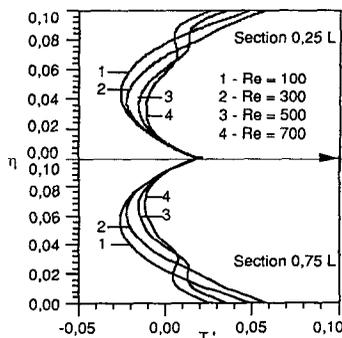


FIG. 10. Température  $T'$  pour  $C = 0,1$ ,  $A = 0,3$  et  $Pr = 4,10$ .

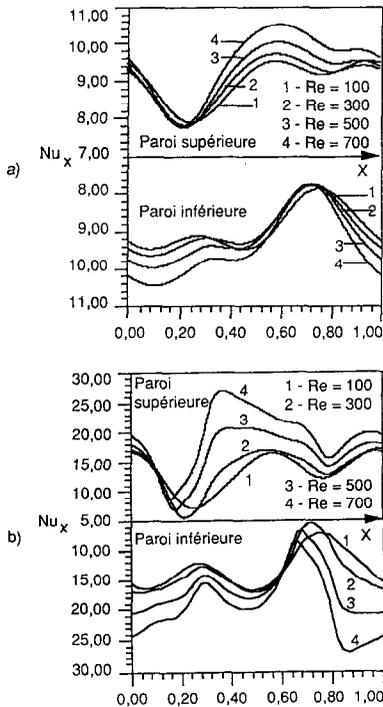


FIG. 11. Nombre de Nusselt local pour: (a)  $A = 0,1$  ;  
(b)  $A = 0,3$ .

La Fig. 11 fait ressortir que le nombre de Nusselt local croît en fonction de  $Re$  et de  $A$ . On note aussi que la valeur de  $Nu_x$  est la même pour les deux parois aux niveaux de deux sections distantes l'une de l'autre de  $0,5L$ . Sur la paroi supérieure, pour  $A = 0,1$ , le minimum est atteint au voisinage de la section  $0,22L$ . Le maximum se situe au voisinage de la section  $0,58L$ . Sur la paroi inférieure, le maximum est atteint au voisinage de la section  $0,08L$ . Le minimum se situe au voisinage de la section  $0,72L$ . Pour  $A = 0,3$ , la position des minimums reste pratiquement inchangée pour les deux parois indépendamment des valeurs de  $Re$ . Il en est de même pour la position des maximums pour  $Re = 100$  et  $300$ . Par contre, pour  $Re = 500$  et  $700$ , le nombre de Nusselt local prend sa valeur maximale au voisinage du point de réattachement du fluide à chacune des parois ( $X = 0,36L$  et  $0,86L$ ). Les auteurs de ref. [6] ont obtenu des résultats analogues dans leur étude expérimentale.

La Fig. 12 montre que le nombre de Nusselt moyen du canal dans sa région centrale est une fonction croissante des quatre paramètres  $Re$ ,  $Pr$ ,  $A$  et  $C$ . Dans leurs études [4, 5], Asako et Faghri ont obtenu des résultats analogues. Cependant, pour  $A = 0,10$  et  $C = 0,10$ , pour l'eau,  $Nu_m$  est indépendant de  $Re$ . Pour  $A = 0,10$ ,  $C = 0,10$  et  $C = 0,15$ , pour l'air,  $Nu_m$  est indépendant de  $Re$  et de  $C$ . Ceci est dû au fait que pour cette valeur de  $A$  l'écoulement est proche d'un écoulement entre deux parois planes. Par ailleurs, les valeurs de  $Re$  restent relativement faibles.

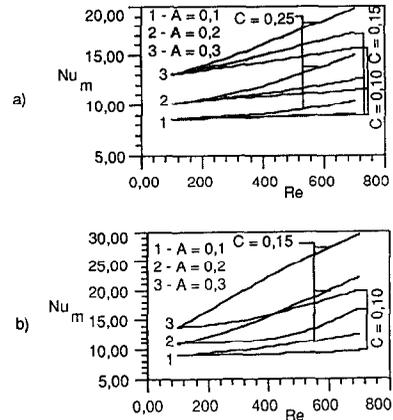


FIG. 12. Nombre de Nusselt moyen pour: (a)  $Pr = 0,71$  ;  
(b)  $Pr = 4,10$ .

#### 4. CONCLUSION

Une méthode numérique, basée sur une transformation non-orthogonale de coordonnées, a permis de calculer les caractéristiques cinématiques et thermiques d'un écoulement périodique entre deux parois ondulées, soumises à un flux de chaleur de densité constante. La présence de poches de recirculation du fluide dans les zones de forte courbure ainsi que le caractère croissant de  $Nu_m$  en fonction de  $Re$ ,  $Pr$ ,  $A$  et  $C$ , déjà observés dans deux études de configurations géométriques proches [4, 5], ont été confirmés. Par ailleurs, le modèle mathématique et le programme informatique, appliqués à l'écoulement entre deux parois planes ont permis de retrouver les principales caractéristiques connues de cet écoulement, attestant ainsi de leur viabilité.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. S. V. Patankar, C. H. Liu and E. M. Sparrow, Fully developed flow and heat transfer in ducts having streamwise periodic variations of cross-sectional area, *J. Heat Transfer* **99**, 180-186 (1977).
2. T. Nishimura, Y. Otori, Y. Kajimoto and Y. Kawamura, Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow, *J. Chem. Engng Jap.* **18**, 550-555 (1985).
3. E. M. Sparrow and A. T. Prata, Numerical solutions for laminar flow and heat transfer in a periodically converging-diverging tube, with experimental confirmation, *Numer. Heat Transfer* **6**, 441-461 (1983).
4. Y. Asako and M. Faghri, Finite volume solutions for laminar flow and heat transfer in a corrugated duct, *J. Heat Transfer* **109**, 627-634 (1987).
5. Y. Asako, H. Nakamura and M. Faghri, Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with rounded corners, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 1237-1244 (1988).
6. T. Nishimura, Y. Kajimoto, A. Tarumoto and Y. Kawamura, Flow structure and mass transfer for a wavy channel in transitional flow regime, *J. Chem. Engng Jap.* **19**, 449-455 (1986).
7. R. S. Amano, A numerical study of laminar and turbulent heat transfer in a periodically corrugated wall channel, *J. Heat Transfer* **107**, 564-569 (1985).

8. M. Faghri, E. M. Sparrow and A. T. Prata, Finite difference solutions of convection–diffusion problems in irregular domains, using a non-orthogonal coordinate transformation, *Numer. Heat Transfer* 7, 183–209 (1984).
9. D. A. Anderson, J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, p. 61. Hemisphere, New York (1984).
10. Chuen-Yen Chow, *An Introduction to Computational Fluid Mechanics*, p. 91. Wiley, New York (1979).

STUDY OF FLOW FIELD AND HEAT TRANSFER BY FORCED CONVECTION IN A  
DUCT WITH SINUSOIDAL WALLS HEATED BY A HEAT FLUX OF CONSTANT  
DENSITY

**Abstract**—A numerical methodology is developed to predict kinematic and thermal characteristics of a bidimensional, laminar and permanent flow in a sinusoidal duct. The basis of the method is an algebraic coordinate transformation which maps the complex fluid domain onto a rectangle. The results for the central area, where the flow is periodic and fully developed show a deformation of the streamlines and recirculation zones in highly curved regions. The average Nusselt number is found to be an increasing function of the Reynolds and Prandtl numbers, and of the amplitude and the height of the duct.